В основе наших исследований лежит дифференциальный оператор Гегенбауэра

$$G = G_\lambda = \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}. \qquad x \in (1.\infty). \ \lambda \in \left(0.\frac{1}{2}\right).$$

Оператор обобщенного сдвига, ассоциированный с оператором G, имеет вид

$$A_{cht}^{\lambda} f(chx) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} f(chxcht - shxsh\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\lambda-1} d\varphi.$$

Обозначим через $L_{p,\lambda}(R_+,G) \equiv L_{p,\lambda}\left(R_+, sh^{2\lambda}xdx\right)$, $1 \le p \le \infty$. пространство измеримых функцийна $R_+ = [0,\infty)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(R_+,G)} = \left(\int_0^{\infty} |f(chx)|^p sh^{2\lambda}xdx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad 1 \le p < \infty.$$

$$\|f\|_{L_{\infty,\lambda}(R_+,G)} = \|f\|_{L_\infty(R_+)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R_+} |f(chx)|.$$

А через $WL_{p,\lambda}(R_+)$ обозначим слабое $L_{p,\lambda}(R_+)$ пространство локально интегрируемых функций $f(chx)$, $x \in R_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(R_+,G)} = \sup_{r>0} r\left|\{x \in R_+ : |f(ch,r)| > r\}\right|_{\lambda}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{r>0} r\left(\int_{\{x\in R_+ : |f(chx)|>r\}} sh^{2\lambda}xdx\right)^{\frac{1}{r}}. \qquad 1 \le p < \infty.$$

Рассмотрим потенциал Гегенбауэра

$$I_G^{\alpha} f(chx) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} r^{\frac{\alpha}{2}-1} h_r(cht)dr\right) A_{cht}^{\lambda} f(chx) sh^{2\lambda}tdt.$$

где

$$h_r(cht) = \int_1^{\infty} e^{-\gamma(\gamma+2\lambda)r} P_\gamma^{\lambda}(cht)\left(\gamma^2-1\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\gamma, \qquad 0 < \alpha < 2\lambda+1.$$

а

$$P_\gamma^{\lambda}(cht) = \frac{\Gamma(\gamma+2\lambda)\cos\pi\lambda}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1)} (2cht)^{-\gamma-2\lambda} {}_2F_1\left(\frac{\gamma}{2}+\lambda, \frac{\gamma}{2}+\lambda+\frac{1}{2}, \gamma+\lambda+1, (cht)^{-2}\right)$$

есть функция Гегенбауэра.

Следующая теорема является основным результатом работы:

Теорема . Пусть $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < 2\lambda+1$ и $1 \le p < \frac{2\lambda+1}{\alpha}$.

a) Если $1 < p < \frac{2\lambda+1}{\alpha}$, *тогда условие* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2\lambda+1}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* I_G^{α} *из* $L_{p,\lambda}(R_+,G)$ *в* $L_{q,\lambda}(R_+,G)$.

b) Если $p = 1$, *тогда условие* $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2\lambda+1}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* I_G^{α} *из* $L_{1,\lambda}(R_+,G)$ *в* $WL_{q,\lambda}(R_+)$.